сительно квадрик Q и инвариантной квадрики S.

8) Система квадратичных уравнений, характеризующих расслоение [2] от конгруэнции (C_1) коник C_1 к конгруэнции (A_3A_4), в силу (7) сводится к одному уравнению

$$(a-c^2)\,\omega_2\wedge\omega_1=0. \tag{8}$$

Квадрика S вырождается в конус, если выполняется условие

$$a-c^2=0. \tag{9}$$

Утверждение теоремы следует из (8), (9) и неравенства $\omega_2\wedge\omega_1\neq 0$.

9) Имеем: $\quad d\mathcal{F}=\lambda\mathcal{F}+\mathcal{F}_1\omega_1+\mathcal{F}_2\omega_2,$

где

$$\mathcal{F}_1=x^4\left(4x^4(1-c^2)n^1+(a-1)x^1\right),$$
$$\mathcal{F}_2=x^4\left(4x^4(1-c^2)n^2+(a-1)x^2\right).$$

Фокальное многообразие квадрики $Q\in(Q)$ определяется системой $\mathcal{F}=0,\ \mathcal{F}_1=0,\ \mathcal{F}_2=0$, откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{D}_0$ конгруэнции конусов - касательных конусов к квадрике Q с вершинами в точках $M=A_4-cA_3$, A_3 и A_4. Уравнения касательных конусов в репере $R=\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$Q_M\equiv (x^3)^2-2x^1x^2+c^2(x^4)^2+2cx^3x^4=0,$$
$$Q_3\equiv (1-c^2)(x^4)^2-2x^1x^2=0, \tag{10}$$
$$Q_4\equiv (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0. \tag{11}$$

Линия пересечения конусов (10) и (11) определяется системой уравнений

$$(x^4)^2-(x^3)^2=0,\quad (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0,$$

т.е. это пара коник C_3, C_4

$$\begin{cases} x^4-x^3=0,\\ (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0; \end{cases}\qquad \begin{cases} x^4+x^3=0,\\ (1-c^2)(x^3)^2-2x^1x^2=0, \end{cases}$$

плоскости которых пересекают прямую A_3A_4 в точках A_3+A_4, A_3-A_4.

В силу системы (7) имеем:

$$dM=(a-c^2)(\omega_2A_1+\omega_1A_2)-3\omega_3^3M,$$

а асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (M) определяются одним и тем же уравнением $\omega_3^1\omega_1+\omega_3^2\omega_2=0$. Доказана

Т е о р е м а 2. Для конгруэнции $\mathcal{D}_0$ справедливы свойства: 1) плоскости коник C_3, C_4 пересекают прямую A_3A_4 в точках, гармонически делящих вершины репера A_3 и A_4; 2) поверхность (M) является огибающей для семейства плоскостей (A_1A_2M); 3) асимптотические линии на поверхностях (M) и (A_3) соответствуют.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-134.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.193-220.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЭКВИДИСТАНТ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Получены структурные формы эквидистантной поверхности и эквидистанты в интерпретации Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Исследованы фокальные многообразия конгруэнции эквидистантных поверхностей и эквидистант. Доказано, что конгруэнция эквидистантных поверхностей имеет в общем случае две собственные фокальные поверхности, а конгруэнция эквидистант - четыре. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций эквидистант.

1. Пусть Q_0 - невырожденная нелинейчатая квадрика в трехмерном проективном пространстве $\mathcal{P}_3$. Примем ее за абсолют пространства Лобачевского Λ_3. В интерпретации Кэли-Клейна (см. [1]) точки пространства Λ_3 интерпретируются внутренними точками абсолюта, прямые - хордами абсолюта, а точки, лежащие на абсолюте Q_0, являются несобственными точками расширенного пространства Λ_3.

Пусть α - произвольная плоскость пространства Λ_3 (внутренняя часть сечения абсолюта Q_0 плоскостью пространства $\mathcal{P}_3$). Перпендикуляр, опущенный из точки $M\in\Lambda_3$ на плоскость α, есть хорда, лежащая на прямой MA, где A - полюс плоскости α относительно абсолюта Q_0.

Так как эквидистантная поверхность (эквидистанта) характеризуется ортогональностью ко всем прямым связки (пучка) расходящихся прямых (прямых, перпендикулярных соответственно одной плоскости или одной прямой), то эквидистантная поверхность

7 Зак. 1399

является в интерпретации Кэли-Клейна невырожденной нелинейчатой квадрикой Q, касающейся изнутри абсолюта Q_0 вдоль кривой второго порядка Γ, а эквидистанта – невырожденной кривой второго порядка C, касающейся абсолюта Q_0 изнутри в двух точках A_1, A_2. Пусть M – произвольная точка эквидистантной поверхности Q (эквидистанты C), A_0 – полюс плоскости кривой Γ (эквидистанты C) относительно Q_0. Тогда, с одной стороны, точка M должна быть внутренней точкой абсолюта, т.е. ее поляра относительно абсолюта Q_0 не пересекает абсолют, а с другой стороны, полюс A_M касательной плоскости в точке M к эквидистантной поверхности Q (касательной к эквидистанте C) относительно абсолюта Q_0 (его сечения плоскостью эквидистанты C) должен лежать на прямой A_0M.

2. Отнесем конгруэнцию (Q) эквидистантных поверхностей Q к реперу $\mathcal{R}=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 – полюс плоскости кривой $\Gamma=Q_0\cap Q$ относительно абсолюта Q_0, A_1 и A_2 – точки пересечения с Γ касательной плоскости к поверхности (A_0), а вершина A_3 – полюс плоскости $(A_0A_1A_2)$ относительно абсолюта Q_0. При надлежащей нормировке вершин репера уравнение абсолюта Q_0 и эквидистантной поверхности $Q\in(Q)$ запишутся в виде:

$$\mathcal{F} \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \qquad (2.1)$$

$$\Phi \equiv a(x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0. \qquad (2.2)$$

Так как квадрика Q расположена внутри абсолюта Q_0, то

$$a>1. \qquad (2.3)$$

Условия инвариантности абсолюта Q_0 с учетом условия эквипроективности задаются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_j^0 - \omega^i = 0, \ \omega_3^i - \omega_j^3 = 0, \ \omega_0^3 + \omega_3^0 = 0, \ \omega_i^j = 0, \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \ \omega_0^0 = 0, \ \omega_3^3 = 0, \end{cases} \qquad (2.4)$$

где ω_α^β $(\alpha,\beta = 0,1,2,3)$ – компоненты деривационных формул репера, $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $i,j,k=1,2$. Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Дифференцируя (2.2) с учетом (2.4) и формул

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha \qquad (2.5)$$

изменения координат текущей точки эквидистантной поверхности Q при переходе к смежному реперу $\{A_\alpha + dA_\alpha\}$, получим:

$$\frac{1}{2}d\Phi = \frac{1}{2}(x^0)^2 da + (1-a)(\omega^2x^0x^1 + \omega^1x^0x^2 + \omega_3^0x^0x^3), \qquad (2.6)$$

откуда следует, что формы Пфаффа $da, \omega^1, \omega^2, \omega_3^0$ являются структурными формами эквидистантной поверхности Q. Следовательно, Q является фигурой ранга $N=4$, жанра $\rho=0$ [2, с.182].

Исключая из рассмотрения случай вырождения поверхности (A_0) в линию, примем формы Пфаффа ω^1, ω^2 за независимые первичные формы. Тогда система пфаффовых уравнений конгруэнции (Q) эквидистантных поверхностей запишется в виде (2.4) и уравнений

$$\omega_3^0 = 0, \ da = a_k\omega^k, \ \omega_i^3 = b_{ii}\omega^i + b\omega^j. \qquad (2.7)$$

Замыкая систему (2.7), получим:

$$(da_1 - a_1\omega_1^1)\wedge\omega^1 + (da_2 - a_2\omega_2^2)\wedge\omega^2 = 0, \ (db_{ii} - 2b_{ii}\omega_i^i)\wedge\omega^i + db\wedge\omega^j = 0. \qquad (2.8)$$

Анализируя систему (2.6) – (2.8), убеждаемся, что конгруэнция (Q) определяется с произволом двух функций двух аргументов. Учитывая (2.7) в (2.6), приходим к системе уравнений

$$\Phi = 0, \quad a_1x^0 + 2(1-a)x^2 = 0, \quad a_2x^0 + 2(1-a)x^1 = 0, \qquad (2.9)$$

определяющей две фокальные точки $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ эквидистантной поверхности $Q\in(Q)$:

$$\mathcal{F}_\varepsilon = M + \varepsilon\sqrt{2(a_1a_2 - 2a(a-1)^2)}\,A_3, \qquad (2.10)$$

где

$$\varepsilon^2 = 1, \quad M = 2(a-1)A_0 + a_2A_1 + a_1A_2 = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_{-1} + \mathcal{F}_1) - \qquad (2.11)$$

точка пересечения прямой $\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}_1$ с касательной плоскостью к поверхности (A_0).

Т е о р е м а 1. Существуют в общем случае две собственные фокальные поверхности конгруэнции (Q), причем прямая, соединяющая фокальные точки эквидистантной поверхности, проходит через полюс A_3 касательной плоскости к ассоциированной поверхности (A_0).

3. Отнесем конгруэнцию (C) эквидистант C к реперу $\mathcal{R}_1=\{A_\alpha\}$, где A_0 – полюс плоскости эквидистанты относительно абсолюта Q_0, A_1, A_2 – точки касания эквидистанты C с абсолютом, а A_3 – полюс плоскости $(A_0A_1A_2)$ относительно абсолюта. При надлежащей нормировке вершин репера уравнение абсолюта запишется в виде (2.1), а уравнения эквидистанты C примут вид:

$$f \equiv (x^3)^2 - 2p\,x^1x^2 = 0, \ x^0 = 0, \qquad (3.1)$$

причем $0<p<1$, т.к. эквидистанта C расположена внутри абсолюта Q_0. Дифференцируя (3.1) с учетом (2.4), получим:

$$\frac{1}{2}df\Big|_{x^0=0} = -x^1x^2dp + (p-1)x^3x^k\omega_k^3, \quad dx^0\Big|_{x^0=0} = -x^k\omega_k^0 - x^3\omega_3^0. \qquad (3.2)$$

Следовательно, формы Пфаффа $\omega^i, dp, \omega_i^3, \omega_3^0$ являются структурными формами эквидистанты C, т.е. эквидистанта является фигурой ранга $N=6$, жанра $\rho=0$. Система уравнений Пфаффа конгруэнции

(C) состоит из уравнений (2.4) и уравнений

$$\omega_i^3 = m_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^0 = n_k\omega^k, \quad dp = p_k\omega^k. \tag{3.3}$$

Замыкая (3.3), находим:

$$\Delta m_{ik}\wedge\omega^k = 0, \quad \Delta n_k\wedge\omega^k = 0, \quad \Delta p_k\wedge\omega^k = 0, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta m_{ii} = dm_{ii} - 2m_{ii}\omega_i^i - m_i\omega^j, \quad \Delta m_{ij} = dm_{ij}, \\ \Delta n_i = dn_i + n_i((n_i m_{jj} + m_{ji}(1-n_j))\omega_j^j - n_i\omega_i^i, \\ \Delta p_i = dp_i + p_i(n_i\omega_3^i - \omega_i^i) + p_j n_j\omega_3^j, \\ m_i = n_i(m_{ii}m_{jj} - m_{ij}m_{ji}) + n_j m_{ii}(m_{ij} + m_{ji}). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Из (2.4), (3.3), (3.4) следует, что конгруэнции (C) эквидистант определяются с произволом четырех функций двух аргументов. Учитывая (3.3) в (3.2), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f = 0, \; x^0 = 0, \; (x^2 + x^3 n_1)\omega^1 + (x^1 + x^3 n_2)\omega^2 = 0, \\ x^3\left((m_{k1}x^k - \frac{p_1}{2p}x^3)\omega^1 + (m_{k2}x^k - \frac{p_2 x^3}{2p})\omega^2\right) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

для определения фокальных точек эквидистанты C и фокальных семейств конгруэнции (C). Из (3.6) следует

Т е о р е м а 2. Конгруэнция (C) эквидистант имеет в общем случае четыре собственные фокальные поверхности. Несобственным фокальным точкам A_1 и A_2 эквидистанты $C\in(C)$ соответствуют координатные фокальные линии $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$.

4. Условие $m_{ii} = 0$ означает, что точка A_i является сдвоенной несобственной фокальной точкой эквидистанты $C\in(C)$. Рассмотрим конгруэнцию эквидистант с двумя сдвоенными несобственными фокальными точками. Тогда

$$m_{11} = 0, \quad m_{22} = 0. \tag{4.1}$$

Учитывая в (2.4), (3.3), (3.4) эти соотношения, убеждаемся, что такие конгруэнции определяются с произволом двух функций двух аргументов. Две собственные фокальные точки эквидистанты C этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$f=0, x^0=0, \; (2pn_1m_{12}+p_1)x^1 - (2pn_2m_{21}+p_2)x^2 + (p_1p_2 - p_2n_1)x^3 = 0. \tag{4.2}$$

Из (2.4) следует, что если касательная плоскость к поверхности (A_0), ассоциированной с конгруэнцией (C), содержит прямую A_1A_2, то и касательная плоскость к поверхности (A_3) также содержит эту прямую, и наоборот. Конгруэнции эквидистант, обладающие этим свойством, характеризуются условиями:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0 \tag{4.3}$$

и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Библиографический список

1. Е ф и м о в Н.В. Высшая геометрия / ГИТТЛ. М., 1953.
2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

УДК 514.75

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Продолжается начатое в [1] - [3] исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств. Доказано, что семейство Π_n порождает в $\mathcal{P}_n$ ряд аффинных связностей. Для каждой из них получена геометрическая характеристика параллельного переноса в этой связности и геодезических линий. Изучены порожденные связностями ассоциированные геометрические образы: квазихарактеристические направления, индикатрисы, главные точки. Рассмотрены некоторые специальные классы семейств Π_n. В работе использованы обозначения и формулы из [1] и [2].

§1. Объекты связностей и тензоры кривизны, порожденные семейством Π_n

Рассмотрим n-параметрическое семейство Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $A_0 \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $a_0 \in p_n$, причем точки A_0 и a_0 описывают n-мерные области. В реперах $\{A_{J'}\}, \{a_{i'}\}$ $(J', i' = \overline{0,n})$ семейство Π_n определяется продолженной системой уравнений Пфаффа (1.6), (1.8) работы [1]. Нормали $\nu(\sigma) \in p_n, N(\sigma) = \pi^{-1}(\nu(\sigma)) \in \mathcal{P}_n$ задаются в однородных координатах $\tilde{x}^i, \tilde{X}^J$ уравнениями

$$\overset{\sigma}{\nu}_i\tilde{x}^i + \tilde{x}^0 = 0, \quad \overset{\sigma}{N}_J\tilde{X}^J = 0, \tag{1.1}$$

где (см. [2], с.51):

$$\overset{\sigma}{\nu}_i = \nu_i + \sigma(N_i - \nu_i), \quad \overset{\sigma}{N}_J = \overset{\sigma}{\nu}_i M_J^i - P_J. \tag{1.2}$$

Отнесем пространство p_n к реперу r_σ [2, с.52], поместив вершины a_i на нормаль $\nu(\sigma)$, а пространство $\mathcal{P}_n$ - к реперу R_σ, в